Esercizio n° 7

In un sistema di servizio con coda di capacità infinita ed un unico servente, questo è in grado di servire in media 6 pacchetti/secondo. Se il sistema riceve pacchetti da una sorgente poissoniana con una frequenza media di 13.184 kbps e la lunghezza dei pacchetti è distribuita secondo un'esponenziale negativa con valore medio di 412 bytes, determinare i principali parametri che caratterizzano le prestazioni del sistema (numero medio di utenti nel sistema, tempo medio di permanenza nel sistema, numero medio di utenti in attesa, tempo medio di attesa).

Nelle ipotesi del problema il sistema di servizio può essere studiato come se si trattasse di un sistema M/M/1.
Le grandezze richieste possono essere tutte calcolate a partire dalla distribuzione delle probabilità di trovare k utenti nel sistema in condizione di regime stazionario. Tale distribuzione è caratterizzata dalla forma

$$\pi_k = (1-\rho)\rho^k$$

al variare di di k tra 0 e ∞.

Come prima cosa, occorre dunque determinare il valore di ρ. Per fare ciò si esprime la frequenza media di arrivo in pacchetti/sec.

$r = 13.184$ kbps
$L = 412 \cdot 8 = 3296$ bit
$\lambda = \frac{r}{L} = \frac{13.184 \cdot 10^3}{412 \cdot 8} = 4$ pacchetti/sec
$\mu = 6$ pacchetti/sec
$\Rightarrow \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Osservazione
Essendo il tasso di utilizzazione ρ dato dal rapporto tra la frequenza media di arrivo e la frequenza media di servizio, nel caso specifico in cui siano in gioco pacchetti, è possibile esprimere ρ come il rapporto tra il bit rate medio in ingresso ed il bit rate medio in uscita. Infatti

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\frac{r}{L}}{\frac{C}{L}} = \frac{r}{C}$$

dove si è indicato con C la capacità media di servizio del sistema espressa in bps.
La conferma numerica dell'osservazione precedente è

$r = 13.184$ kbps
$C = 6 \cdot 412 \cdot 8 = 19776$ bps
$\Rightarrow \rho = \frac{r}{C} = \frac{13184}{19776} = \frac{2}{3}$

A. Numero medio di utenti nel sistema (coda+servente) N

$$N=\sum_{k=0}^{\infty}k\pi_k=\sum_{k=0}^{\infty}k(1-\rho)\rho^k=(1-\rho)\sum_{k=0}^{\infty}k\rho^k=(1-\rho)\rho\sum_{k=0}^{\infty}k\rho^{(k-1)}=(1-\rho)\rho\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d}{d\rho}\rho^k=$$
$$=(1-\rho)\rho\frac{d}{d\rho}\sum_{k=0}^{\infty}\rho^k=(1-\rho)\rho\frac{d}{d\rho}\frac{1}{1-\rho}=(1-\rho)\rho\frac{1}{(1-\rho)^2}=\frac{\rho}{1-\rho}$$

Sostituendo i dati del problema,

$$N=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}=2$$

B. Tempo medio di attesa nel sistema (coda+servente) T

Dalla formula di Little,
$$T=\frac{N}{\lambda}=\frac{\rho}{1-\rho}\cdot\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{\mu(1-\rho)}=\frac{1}{\mu-\lambda}$$

Sostituendo i dati del problema,

$$T=\frac{1}{6-4}=0.5\ \text{sec}$$

C. Numero medio di utenti in attesa (coda) N_{attesa}

$$N_{attesa}=N-N_{servente}$$
dove $N_{servente}$ rappresenta il numero medio di utenti all'interno del servente.

$$N_{servente}=1\cdot\rho+0\cdot(1-\rho)=\rho$$
$$\Rightarrow N_{attesa}=\frac{\rho}{1-\rho}-\rho=\frac{\rho^2}{1-\rho}$$

Allo stesso risultato si sarebbe pervenuti considerando che la probabilità di avere k utenti in coda equivale

i) alla probabilità di avere 0 o 1 utenti nel sistema, $(\pi_0+\pi_1)$, se k=0;
ii) alla probabilità di avere (k+1) utenti nel sistema π_{k+1} se k≠0.

$$\Rightarrow N_{attesa}=0\cdot(\pi_0+\pi_1)+\sum_{k=1}^{\infty}k\pi_{k+1}=\sum_{k=1}^{\infty}k\pi_{k+1}=\sum_{k=0}^{\infty}k\pi_{k+1}=\sum_{k=0}^{\infty}k(1-\rho)\rho^{k+1}=$$
$$=(1-\rho)\rho^2\sum_{k=0}^{\infty}k\rho^{k-1}=(1-\rho)\rho^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d}{d\rho}\rho^k=(1-\rho)\rho^2\frac{d}{d\rho}\sum_{k=0}^{\infty}\rho^k=(1-\rho)\rho^2\frac{d}{d\rho}\frac{1}{1-\rho}=$$
$$=(1-\rho)\rho^2\frac{1}{(1-\rho)^2}=\frac{\rho^2}{1-\rho}$$

Sostituendo i dati del problema,

$$N_{attesa} = \frac{(\frac{2}{3})^2}{1-\frac{2}{3}} = \frac{4}{3}$$

D. Tempo medio di attesa (coda) T_{attesa}

$$T_{attesa} = T - T_{servente}$$

dove $T_{servente} = \frac{1}{\mu}$ rappresenta il tempo medio di permanenza nel servente.

$$\Rightarrow T_{attesa} = \frac{1}{\mu-\lambda} - \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{\rho}{\mu-\lambda}$$

Sostituendo i dati del problema,

$$T_{attesa} = \frac{0.67}{6-4} = 0.335 \text{ sec}$$

ESERCIZIO n° 8

Un multiplatore statistico è caricato dal traffico emesso da 100 sorgenti che generano pacchetti di lunghezza media pari a 548 byte con un tempo medio di interarrivo di 63 secondi.

A. Determinare la capacità d'uscita del multiplatore che garantisce che la probabilità di avere un numero di pacchetti nel sistema maggiore o uguale a 20 sia pari all'1%.

La probabilità che nel sistema sia presente un numero di pacchetti maggiore o uguale a k è pari a

P (numero pacchetti nel sistema ≥ 20) =

$$= \sum_{k=20}^{\infty} \pi_k = \sum_{k=20}^{\infty} (1-\rho)\rho^k = (1-\rho)\sum_{i=0}^{\infty} \rho^{i+20} = (1-\rho)\rho^{20}\sum_{i=0}^{\infty}\rho^i = \rho^{20}$$

Imponendo che tale probabilità sia uguale all'1%, si determina il tasso di utilizzazione ρ.

$$\rho^{20} = 0.01 \Rightarrow \rho = 0.01^{\frac{1}{20}} = 0.794$$

Per determinare la capacità del multiplatore occorre prima valutare la frequenza media degli arrivi all'ingresso del multiplatore. In particolare, la frequenza media degli arrivi, in pacchetti al secondo, che è possibile associare alla singola sorgente è

$$\lambda_i = \frac{1}{63} = 0.015873 \text{ pacchetti/sec}$$

Tenendo conto del numero totale delle sorgenti, risulta
$\lambda = 100 \cdot \lambda_i = 1.5873$ pacchetti/sec

A questo punto la capacità del multiplatore può essere calcolata come

$$\mu = \frac{\lambda}{\rho} = \frac{1.5873}{0.794} = 1.99912 \text{ pacchetti/sec}$$

Nota la frequenza media di servizio μ, è possibile ricavare la capacità d'uscita del multiplatore C come

$C = \mu \cdot L$
dove L rappresenta la lunghezza media dei pacchetti.
$C = 1.999 \cdot 548 \cdot 8 = 8764.14$ bps

Per l'osservazione fatta a proposito dell'esercizio precedente, la capacità d'uscita C avrebbe potuto essere ricavata convertendo sin dall'inizio la frequenza media degli arrivi λ nella corrispondente frequenza media degli arrivi r espressa in bps. Infatti

$$r_i = \frac{548 \cdot 8}{63} = 69.5873 \text{ bps}$$
$$r = 100 \cdot r_i = 6958.73 \text{ bps}$$
$$C = \frac{r}{\rho} = \frac{6958.7}{0.794} = 8764.14 \text{ bps}$$

B. Determinare la probabilità che la probabilità che il generico pacchetto trascorra nel sistema un tempo maggiore di 10 secondi.

Indicato con t il tempo di attesa che il generico pacchetto trascorre all'interno del sistema (coda+servente), risulta

$$P(t > 10) = 1 - P(t \leq 10) = 1 - F_t(10)$$

dove $F_t(10)$ rappresenta la distribuzione di probabilità del tempo di attesa nel sistema $F_t(x)$ valutata per $x = 10$ sec. Per rispondere al quesito, occorre pertanto conoscere l'andamento della distribuzione di probabilità del tempo di attesa nel sistema, di cui è stato ricavato il valore medio $T = \frac{1}{\mu - \lambda}$ mediante l'applicazione della legge di Little.
E' possibile dimostrare che il tempo di attesa nel sistema è caratterizzato da una distribuzione esponenziale negativa di parametro $(\mu - \lambda)$. In altre parole
$F_t(x) = 1 - e^{-(\mu - \lambda)x}$

Nota la forma della distribuzione di probabilità del tempo di attesa, la probabilità richiesta dal quesito può essere calcolata come

$$P(t > 10) = 1 - P(t \le 10) = 1 - F_t(10) = e^{-(\mu-\lambda)10} = e^{-(1.9991-1.5873)10} = 1.63\%$$

<u>Osservazione</u>
r e C possono essere usate rispettivamente al posto di λ e μ solo nel momento in cui si ha a che fare col tasso di utilizzazione ρ, in cui compare il loro rapporto. In tutti gli altri casi (tempo medio di attesa nel sistema, tempo medio di attesa in coda, distribuzione di probabilità del tempo di attesa, etc) i parametri λ e μ da cui dipendono sono da considerare come espressi in pacchetti/sec. Tali grandezze si ricavano infatti ragionando sulla singola unità fisica che il sistema riceve ed emette: questa è il pacchetto e non il singolo bit.

C. Determinare il 99-imo percentile del tempo di attesa o ritardo.

Si definisce percentile r del tempo di attesa nel sistema (coda+servente) t il valore t_r tale che la probabilità che il tempo di attesa superi t_r è pari a (1-r%); in altre parole l'r-imo percentile del ritardo coincide col valore del tempo di attesa che verrà sperimentato solo dall'(1-r%) di utenti del sistema. Per determinare l'r-imo percentile t_r, occorre pertanto imporre la condizione

$$P(t > t_r) = 1 - P(t \le t_r) = 1 - F_t(t_r) = 1 - r\%$$

Il 99-imo percentile coincide allora con l'istante di tempo t_{99} tale che

$$e^{-(\mu-\lambda)t_{99}} = 0.01 \Rightarrow t_{99} = -\frac{1}{\mu-\lambda}\ln 0.01 = -\frac{1}{1.9991-1.5873}\cdot \ln 0.01 = 11.186 \text{ sec}$$

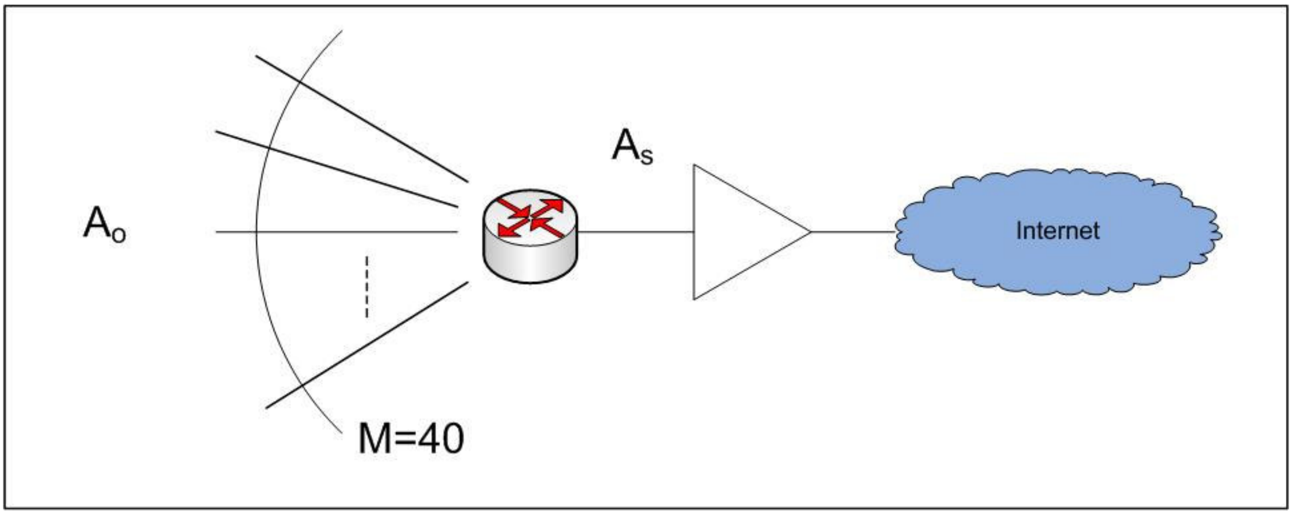
<u>Osservazione</u>
E' possibile notare la coerenza del risultato trovato in presenza con quello appena trovato. Infatti, la probabilità che il tempo di attesa sia maggiore di 10 sec è stata calcolata nella sezione B ed è risultata pari all'1.63%. Nella sezione B il modo di procedere è inverso, nel senso che si fissa il valore di probabilità e si determina il corrispondente valore del tempo di attesa. Avendo fissato nella sezione C un valore di probabilità, l'1%, molto vicino ma minore rispetto a quello della sezione B, 1.64%, mi aspetto di trovare un tempo di attesa che sia i) molto vicino rispetto a quello determinato nel punto B (infatti 11.1186 secondi è un valore molto vicino a 10 secondi), ii) maggiore rispetto al valore determinato nel punto B (infatti 11.1186 secondi è maggiore di 10 secondi). A proposito dell'ultimo punto, basti pensare che tempi d'attesa superiori al valore medio del tempo di attesa, $T = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{1.9991-1.5873} = 2.428$ secondi, vengono sperimentati nell'$e^{-1} = 36.79\%$ dei casi e che più i valori del tempo di attesa considerati si allontanano dal valore medio, minore risulta la probabilità di sperimentare tempi d'attesa superiori.

ESERCIZIO n° 9

Un Internet Service Provider (ISP) è connesso mediante un router, da un lato, alla rete telefonica con M = 40 porte e, dall'altro lato, alla rete Internet. Si assuma che l'ISP riceva complessivamente 280 richieste ogni 8 ore e che la durata media della connessione sia 1 ora. Durante la chiamata, il flusso dati dell'utente è caratterizzato da un bit rate medio F = 11180 bit/sec.

A. Determinare la capacità d'uscita che il multiplatore deve avere se si vuole che il rapporto di utilizzazione del multiplatore sia 0.8.

La figura sottostante illustra schematicamente il sistema che il problema propone di studiare.



Il traffico complessivamente offerto dagli utenti all'ingresso del sistema è

$$A_o = \frac{270}{8} = 35 \text{ Erl}$$

Se le porte a disposizione dell'ISP fossero infinite, il traffico offerto A_0 si ritroverebbe anche all'ingresso del multiplatore statistico che opera per l'ISP. Poiché però le porte a disposizione dell'ISP non sono infinite ma solo 40, una parte del traffico offerto A_0 andrà perduta e solo la frazione smaltita A_s si ritrova all'ingresso del multiplatore statistico.
Per calcolare la frazione smaltita del traffico offerto A_0, occorre prima calcolare la probabilità di perdita mediante l'uso delle tabelle dirette di Erlang. In particolare

$$P_{perdita} = B(35,40) = 0.054$$

Di conseguenza il traffico che effettivamente si presenta all'ingresso del multiplatore è

$$A_s = A_o\left(1 - P_{perdita}\right) = 35(1 - 0.054) = 33.11 \text{ Erl}$$

Si ricorda inoltre che il valore appena trovato è un valore medio e rappresenta il numero medio di connessioni smaltite, ossia il numero medio di richieste di connessione che giunge al multiplatore. Ossia

$r = 33.11 \cdot 11180 = 370170$ bps

Pertanto se si vuole avere un tasso di utilizzazione dell'80%, la capacità della linea d'uscita del multiplatore deve essere

$C = \frac{r}{\rho} = \frac{370170}{0.8} = 462712$ bps

Esercizio n° 10

In un sistema di servizio con coda di capacità nulla e due serventi, arrivano richieste di due diversi tipi, fax e chiamate telefoniche. Le richieste di fax sono inoltrate da una sola linea e possono essere servite da un solo servente. Se una richiesta di fax giunge alla linea, mentre una richiesta di fax sta già venendo servita all'interno del sistema, la linea scarta la richiesta e non la inoltra al sistema. Alle richieste di fax è inoltre associata una frequenza media di arrivo pari ad α ed una frequenza media di servizio pari a β. Le richieste di chiamate telefoniche arrivano da più linee con una frequenza media complessiva pari a λ e vengono servite con un tasso medio pari a μ.

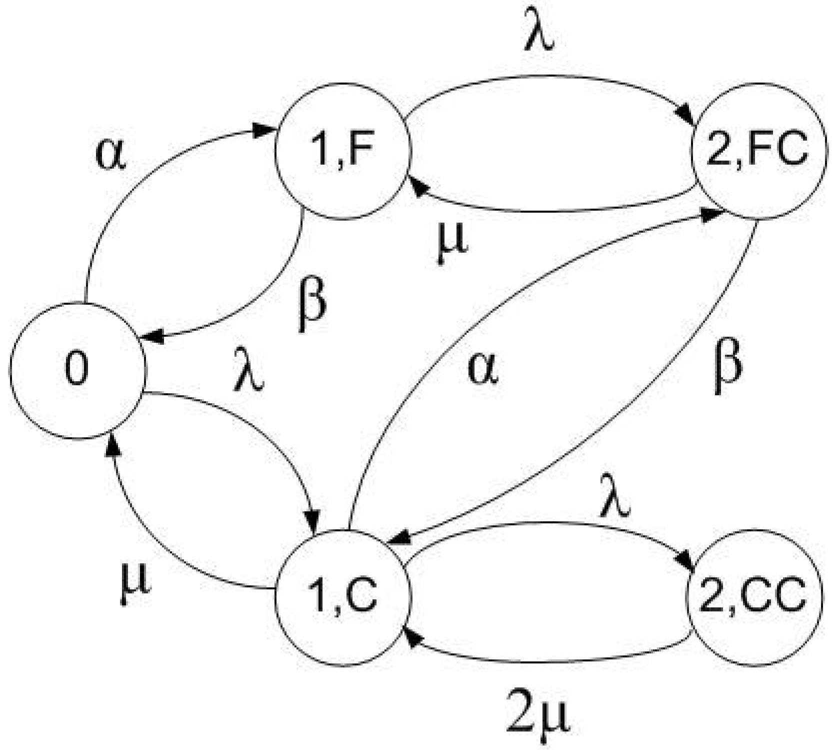
E. Determinare le probabilità di blocco relative alle richieste di fax e di chiamate telefoniche.

Occorre come prima cosa determinare il diagramma di transizione degli stati e quindi scegliere la modellizzazione più opportuna.
Si noti a tal proposito che il processo associato al numero di utenti complessivamente presenti nel sistema (variabile tra 0 e 2) non è una catena di Markov. Si ricorda che 2 sono le proprietà che contraddistinguono un processo di Markov:

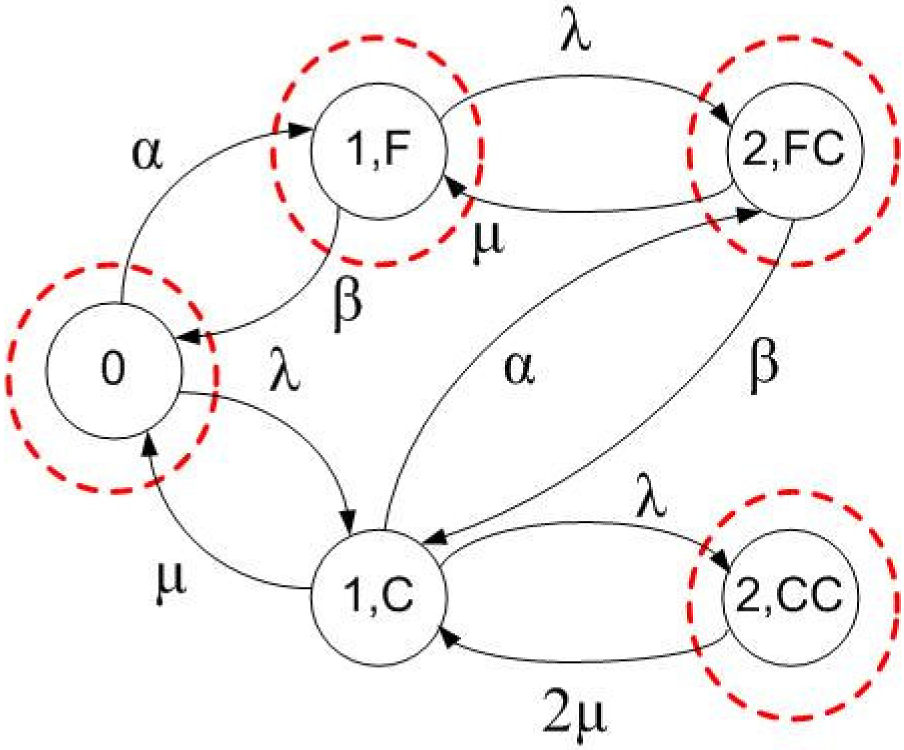
1) il tempo di permanenza in ogni stato è una variabile casuale con distribuzione esponenziale negativa;
2) le frequenze di transizione di stato dipendono solo dallo stato di partenza e non dagli stati visitati precedentemente.

Nel caso proposto, se si assume come stato il numero di utenti nel sistema, la proprietà 1 è sicuramente verificata, ma lo stesso non si può dire per la proprietà 2. Infatti, il fatto di sapere che un solo servente è occupato non consente di stabilire come si evolverà il sistema nel caso di fine servizio, visto che la frequenza di transizione 1->0 dipende dal tasso di servizio e questo è diverso a seconda che il cliente servito sia una richiesta fax o una richiesta telefonica. Inoltre, anche il fatto di sapere che entrambi i serventi sono occupati non consente di dire come si evolverà il sistema in caso di fine servizio, visto che la frequenza di transizione 2->1 dipende dal tasso di servizio e questo è diverso a seconda che il cliente servito sia una richiesta fax o una richiesta telefonica.
Se si assume invece come stato non solo il numero di utenti del sistema, ma anche il tipo di utenti (richieste fax e richieste telefoniche) all'interno del sistema, questo diventa

modellizzabile in termini di una catena di Markov, visto che l'informazione fornita garantisce in questo caso che le proprietà 1 e 2 risultino soddisfatte. In particolare, il diagramma di transizione degli stati è il seguente:



Il sistema che consente di determinare le probabilità stazionarie associate ai diversi stati può essere determinato imponendo la condizione di normalizzazione ed operando ad esempio i 4 tagli riportati nella figura sottostante.



Esso risulta in particolare

$$
\begin{cases}
(\alpha+\lambda)\pi_0 = \beta\pi_{1,F} + \mu\pi_{1,C} \\
(\beta+\lambda)\pi_{1,F} = \alpha\pi_0 + \mu\pi_{2,FC} \\
(\mu+\beta)\pi_{2,FC} = \lambda\pi_{1,F} + \alpha\pi_{1,C} \\
\mu\pi_{2,CC} = \lambda\pi_{1,C} \\
\pi_0 + \pi_{1,F} + \pi_{1,C} + \pi_{2,FC} + \pi_{2,CC} = 1
\end{cases}
$$

Risolvendo, si trova

$$
\begin{cases}
\pi_0 = \dfrac{2\beta\mu^2}{\beta\lambda^2 + 2\alpha\lambda\mu + 2\beta\lambda\mu + 2\alpha\mu^2 + 2\beta\mu^2} \\
\pi_{1,F} = \dfrac{2\alpha\mu^2}{\beta\lambda^2 + 2\alpha\lambda\mu + 2\beta\lambda\mu + 2\alpha\mu^2 + 2\beta\mu^2} \\
\pi_{1,C} = \dfrac{2\beta\lambda\mu}{\beta\lambda^2 + 2\alpha\lambda\mu + 2\beta\lambda\mu + 2\alpha\mu^2 + 2\beta\mu^2} \\
\pi_{2,FC} = \dfrac{2\alpha\lambda\mu}{\beta\lambda^2 + 2\alpha\lambda\mu + 2\beta\lambda\mu + 2\alpha\mu^2 + 2\beta\mu^2} \\
\pi_{2,CC} = \dfrac{\beta\lambda^2}{\beta\lambda^2 + 2\alpha\lambda\mu + 2\beta\lambda\mu + 2\alpha\mu^2 + 2\beta\mu^2}
\end{cases}
$$

Per determinare la probabilità di blocco relativa alla richiesta di fax, occorre ricordare che le richieste sono trasmesse al sistema solo se nessuno dei due serventi sta già servendo una richiesta di fax. In altri termini, il processo di arrivo delle richieste di fax dipende dallo stato del sistema. Di conseguenza, si ha perdita solo quando i due serventi stanno entrambi servendo una chiamata telefonica.

$$\Rightarrow P_{blocco,fax} = \pi_{2,CC}$$

Il processo di arrivo delle richieste di chiamate telefoniche non dipende invece dallo stato del sistema e si ha perdita quando entrambi i serventi sono occupati, a prescindere dal tipo di richiesta che sta venendo servita.

$$\Rightarrow P_{blocco,telefonata} = \pi_{2,FC} + \pi_{2,CC}$$

F. Determinare le frequenze medie con cui le richieste di fax e telefonate sono smaltite dal sistema.

Nel caso delle richieste di fax occorre tenere in conto il fatto che il processo degli arrivi dipende dallo stato del sistema. In conseguenza di ciò la frequenza media del traffico offerto non è α, ma sarà pari alla sola frazione di α che la linea inoltra al sistema,

$$\Rightarrow \lambda_{o,fax} = \alpha(\pi_0 + \pi_{1,C} + \pi_{2,CC})$$

Di tale frequenza del traffico offerto la frazione perduta è

$\lambda_{p,fax} = \alpha \cdot \pi_{2,CC}$

mentre la frazione smaltita è

$\lambda_{s,fax} = \alpha(\pi_0 + \pi_{1,C})$

Nel caso invece delle richieste di chiamate telefoniche, il processo degli arrivi non dipende dallo stato del sistema. In conseguenza di ciò, la frequenza media del traffico offerto è esattamente λ, e le frequenze medie del traffico perduto e smaltito sono

$$\lambda_{p,telefonata} = \lambda(\pi_{2,FC} + \pi_{2,CC})$$
$$\lambda_{s,telefonata} = \lambda(1 - \pi_{2,FC} - \pi_{2,CC})$$

ESERCIZIO n° 11

Un multiplatore a pacchetto è caricato dal traffico emesso da 60 sorgenti. Ogni sorgente esibisce un comportamento periodico, nel senso che ad intervalli di durata media $T_1 = 1$ secondo, durante i quali la singola sorgente emette pacchetti con tempo di interarrivo distribuito esponenzialmente e valore medio pari a 40 msec, seguono intervalli di durata media $T_2 = 5$ secondi, durante i quali la singola sorgente emette pacchetti con tempo di interarrivo distribuito esponenzialmente e valore medio pari a 50 msec. Se la lunghezza dei pacchetti è distribuita esponenzialmente con valore medio 600 byte, determinare la capacità della linea d'uscita che consente di avere un tasso di utilizzazione del 90%.

La frequenza con cui la singola sorgente emette pacchetti può assumere due valori diversi, a seconda che ci si trovi in un intervallo di tempo di tipo T_1 o in un intervallo di tempo di tipo T_2. Inoltre la probabilità che ci si trovi in un intervallo di tempo di tipo T_1 è pari a $\frac{T_1}{T_1 + T_2}$, mentre la probabilità che ci si trovi in un intervallo di tempo di tipo T_2 è pari a $\frac{T_2}{T_1 + T_2}$. Di conseguenza, la singola sorgente emetterà pacchetti alla frequenza media

$$\lambda_i = \frac{T_1}{T_1 + T_2} \cdot \frac{1}{40 \cdot 10^{-3}} + \frac{T_2}{T_1 + T_2} \cdot \frac{1}{50 \cdot 10^{-3}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{40 \cdot 10^{-3}} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{50 \cdot 10^{-3}} = 20.833 \text{ pacchetti/sec}$$

La frequenza media complessiva con cui arrivano pacchetti al multiplatore dovrà tenere conto del fatto che le sorgenti che caricano il multiplatore sono $M = 60$.

$$\Rightarrow \lambda = M \cdot \lambda_i = 60 \cdot 20.833 = 1250 \text{ pacchetti/sec}$$

Se si vuole avere un tasso di utilizzazione del multiplatore pari al 90%, il tasso di servizio del sistema dovrà essere

$\mu = \frac{\lambda}{\rho} = \frac{1250}{0.9} = 1388.89$ pacchetti/sec.

Sfruttando il dato sulla lunghezza media dei pacchetti, è possibile ricavare la capacità della linea d'uscita C. In particolare

$C = 1388.89 \cdot 600 \cdot 8 = 6.67$ Mbps

ESERCIZIO n° 12

Un sistema con capacità di coda infinita ed un solo servente riceve pacchetti secondo un processo poissoniano e con un tasso medio di arrivo di 8 pacchetti/sec. La lunghezza dei pacchetti è distribuita secondo un'esponenziale negativa con valore medio di 1500 byte. Si assuma inoltre che i valori possibili per la capacità d'uscita siano multipli di 50 kbps.

B. Determinare la capacità media di servizio del sistema che garantisce che il 99-imo percentile del tempo di attesa sia pari a 10 volte il tempo medio di servizio.

Il 99-imo percentile del tempo di attesa risponde alla seguente relazione

$P(t > t_r) = 1 - P(t \le t_r) = 1 - F_t(t_r) = 1 - r\%$

dove si è indicato con t il tempo di attesa nel sistema (coda+servente) e dove

$P(t > t_{99}) = 1 - P(t \le t_{99}) = 1 - F_t(t_{99}) = e^{-(\mu-\lambda)t_{99}}$

Imponendo che il 99-imo percentile sia pari a 10 volte il tempo medio di servizio, si trova che

$$e^{-(\mu-\lambda)\frac{10}{\mu}} = 0.01 \Rightarrow (\mu-\lambda)\frac{10}{\mu} = -\ln(0.01) \Rightarrow 10(1-\rho) = -\ln(0.01) \Rightarrow 1-\rho = -\frac{1}{10}\ln(0.01) = 0.46\%$$

$\Rightarrow \rho = 54\%$

A questo punto si può ricavare la frequenza media di servizio come

$\mu = \frac{\lambda}{\rho} = \frac{8}{0.54} = 14.81$ pacchetti/sec

Al valore trovato in precedenza corrisponde una capacità media

$C = 14.81 \cdot 1500 \cdot 8 = 177.72$ kbps

Il valore che la capacità media di servizio del sistema deve assumere è pertanto pari a 200 kbps.

C. Nell'ipotesi che la capacità di coda sia finita e pari a 9, determinare la capacità media di servizio che garantisce che la probabilità di blocco sia inferiore all'1%.

Se la capacità di coda è pari a 9, il sistema sarà in grado di accogliere al più 10 pacchetti e quando ciò accade si ha blocco o perdita. Pertanto

$$P_{blocco} = \pi_{10} = \frac{1-\rho}{1-\rho^{11}}\rho^{10}$$

Imponendo che tale probabilità sia pari all'1%, si perviene all'equazione non lineare

$$\rho^{10} - \rho^{11} = 0.01\left(1-\rho^{11}\right)$$

Per risolvere il problema, si procede allora per tentativi i) considerando una capacità $C = 50000 \cdot i$ bps, con $i = 1,2,3,...$, ii) calcolando il corrispondente tasso di utilizzazione come $\rho = \frac{r}{C}$ (r, capacità media di arrivo, è pari a $8 \cdot 1500 \cdot 8 = 96000$ bps), iii) calcolando il corrispondente valore della probabilità di blocco, iv) verificando se questo è inferiore all'1% (se si, ci si ferma; diversamente si procede considerando $i+1$).

Si può innanzitutto osservare che per la stabilità del sistema deve essere $C > r$ e quindi non ha senso effettuare il tentativo per $i = 1$.
Per $i = 2$,

$$i = 2 \Rightarrow \begin{cases} \rho = \dfrac{96000}{100000} = 0.96 \\ P_{blocco} = \dfrac{1-0.96}{1-0.96^{11}} 0.96^{10} = 7.35\% \end{cases}$$

Per $i = 3$,

$$i = 3 \Rightarrow \begin{cases} \rho = \dfrac{96000}{150000} = 0.64 \\ P_{blocco} = \dfrac{1-0.64}{1-0.64^{11}} 0.64^{10} = 0.42\% \end{cases}$$

Il valore che la capacità media di servizio del sistema deve assumere è pertanto pari a 150 kbps.