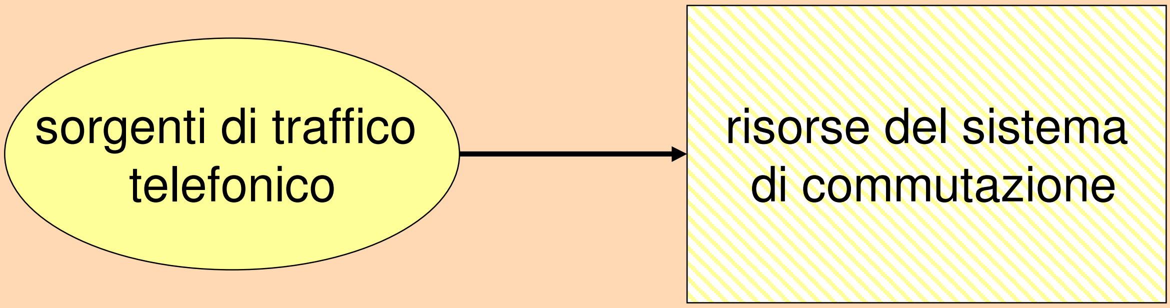
Reti di Telecomunicazioni 1

Corso "on-line" - AA2006/07
"Sistemi a coda" Blocco E4 v2

Ing. Stefano Salsano
e-mail: stefano.salsano@uniroma2.it

- **Modelli per sistemi telefonici - La coda M/M/S/S**

Modelli per sistemi di commutazione telefonici



- **Le sorgenti di traffico telefonico presentano richieste di connessione (tentativi di chiamata).**
- **Il servente del sistema di commutazione (indicato con il termine generico di giunzione) esplica le funzioni necessarie a supportare la chiamata.**
- **Si indica con il termine congestione la condizione in cui si trova il sistema di commutazione quando, al presentarsi di un tentativo di chiamata, non è in grado di effettuare la connessione.**

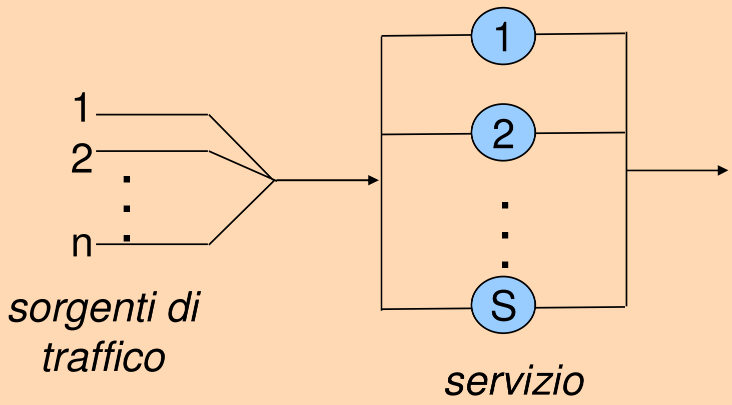
Affrontiamo in questa lezione gli aspetti di base relativi alla modellazione dei sistemi di commutazione telefonici. In particolare analizziamo le situazioni di contesa alle "giunzioni" di una rete telefonica cioè i collegamenti tra i vari nodi.

Un collegamento tra due nodi è caratterizzato da un numero massimo di chiamate che possono essere trasportate contemporaneamente, corrispondente al numero di "giunzioni" del collegamento.

Una chiamata che arriva ad un nodo e deve essere instradata su un collegamento può essere accettata o rifiutata a seconda se il collegamento ha ancora giunzioni disponibili o meno. Non vi è possibilità di accodamento nel nodo in attesa che una giunzione si liberi. Il sistema è dunque "a perdita".

Si noti che la chiamata potrebbe essere reinstradata dal nodo su una seconda giunzione, ma questo non modifica quanto detto sopra: per quanto riguarda il primo collegamento, la chiamata NON viene accodata e dunque si può modellare il collegamento come un sistema "a perdita".

Sistemi a coda multiservente a perdita in senso stretto



- **La richiesta in arrivo è servita subito se trova almeno una risorsa (servente) disponibile, altrimenti è rifiutata.**
- **Tali sistemi hanno rilevante interesse nello studio delle reti telefoniche.**

Un collegamento di capacità S cioè con S linee di giunzione, viene modellato come un sistema di servizio con S serventi. Una chiamata che trova una linea libera va ad occupare un "servente" per tutta la durata della chiamata ed esce dal sistema al termine della chiamata.

Il tempo medio di servizio corrisponde quindi alla durata media delle chiamate telefoniche che arrivano al collegamento in questione.

Modelli per sistemi di commutazione telefonici

- Per modellare i sistemi a perdita si può assumere una delle tre seguenti ipotesi relative al comportamento di una sorgente quando riceve un rifiuto ad un suo tentativo di chiamata:
  - la sorgente che incontra congestione desiste immediatamente dal richiedere servizio e riprova dopo un intervallo di tempo che risulta dalla realizzazione del processo di ingresso (ipotesi CPS-Chiamate Perdute Sparite)
  - la sorgente che incontra congestione insiste per un tempo non superiore a quello della durata della chiamata (θ) e se dopo un tempo $\Delta t<\theta$ la richiesta viene accolta la chiamata dura $\theta - \Delta t$ (ipotesi CPT-Chiamate Perdute Tenute)
  - la sorgente insiste indefinitamente nella richiesta di servizio fino a quando la chiamata non verrà accettata (ipotesi CPR-Chiamate Perdute Ripetute)

Nella slide precedente si discute come modellare il comportamento di una sorgente che riceve un rifiuto di servizio a causa di una situazione di congestione.

Le tre ipotesi descritte (ovviamente non sono le uniche possibili in teoria per descrivere il comportamento delle sorgenti in questa situazione) hanno comunque delle proprietà tali da poter essere utilizzate per una risoluzione "analitica" del modello di coda.

L'ipotesi di chiamate perdute sparite è la più semplice da trattare analiticamente ed è quella che considereremo nel nostro studio.

Modelli per sistemi di commutazione telefonici

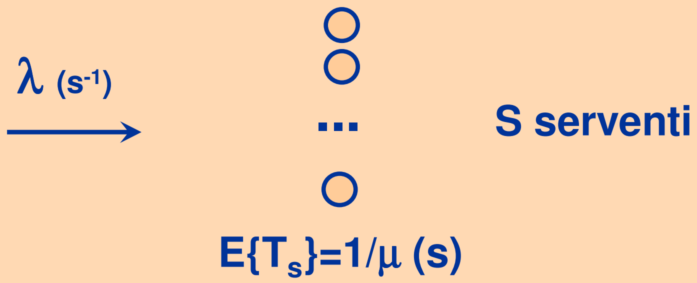
- Ipotesi semplificative per l'analisi di un sistema di commutazione a singolo stadio
  - richieste di servizio presentate al sistema in accordo ad un processo di Poisson di parametro λ;
  - tempi di servizio i.i.d. (identicamente distribuiti) con legge esponenziale negativa di valor medio $E\{T_s\}=1/\mu$ (s)
  - processi di arrivo e di servizio statisticamente indipendenti.
  - la connessione delle sorgenti alle risorse e la loro disconnessione avvengono istantaneamente;
  - le risorse del sistema di commutazione (S giunzioni) sono individualmente e indipendentemente assegnabili, equivalenti e completamente condivise (fascio perfetto)
  - vale l'ipotesi Chiamate Perdute Sparite

Come si vede nella slide precedente, consideriamo un singolo collegamento senza preoccuparci di eventuali interconnessioni con altri collegamenti, reinstradamenti di chiamate ecc.

Non si modellano i tempi di instaurazione (e di rilascio) delle connessioni, assumendo che l'instaurazione e il rilascio avvengano "istantaneamente". Il tempo di occupazione del servizio corrisponde quindi esattamente alla durata della chiamata.

L'ipotesi del "fascio perfetto" ci dice che tutte le giunzioni se sono libere possono essere assegnate a qualunque chiamata, qualunque sia l'ordine di impegno e di rilascio delle giunzioni stesse.

Coda M/M/S/S

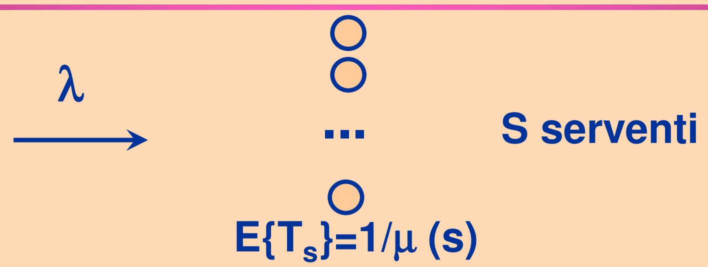


- **Ipotesi:**
  - » **tempi di interarrivo i.i.d. con distribuzione esponenziale negativa;**
  - » **tempi di servizio i.i.d. con distribuzione esponenziale negativa;**
  - » **processi di arrivo e di servizio statisticamente indipendenti.**
  - » **S serventi, statisticamente identici ed indipendenti;**
  - » **Capacità del sistema S, quindi capacità nulla della fila d'attesa.**

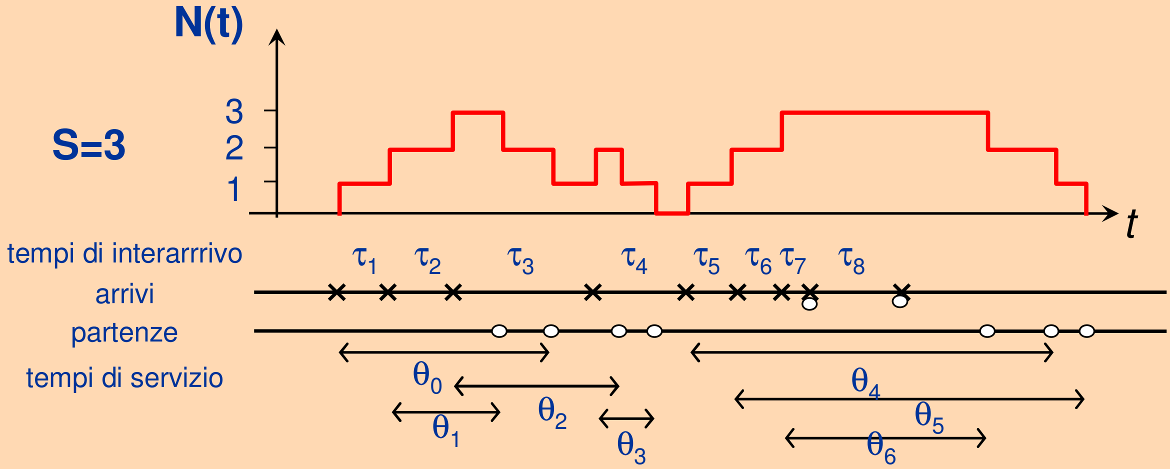
Nella slide successiva si mostra un esempio di evoluzione dello stato per una coda che modella un sistema con 3 linee di giunzione. Lo stato può assumere 4 valori, da 0 (sistema vuoto) a 3 (tutte le linee occupate: sistema in congestione).

Si vede che se arrivano chiamate quando il sistema è in congestione, lo stato non cambia e la chiamata viene scartata (vedere tempi di interarrivo τ_7 e τ_8).

Coda M/M/S/S: evoluzione



- Lo stato è rappresentato dal numero di serventi occupati N(t)



Parametri prestazionali

In questo contesto è di particolare importanza il calcolo delle due misure di congestione:

- probabilità di congestione temporale (indicata anche come probabilità di blocco) :

$$S_p = \Pr\{\text{sistema bloccato}\} = \Pr\{\text{k} = \text{S}\} = p_s$$

- probabilità di congestione di chiamata (o di rifiuto) :

$$\Pi_p = \Pr\{\text{rifiuto}\} = \Pr\{\text{sistema bloccato} | \text{r.s.o}\} =$$

$$= S_p \frac{\Pr\{\text{r.s.o} | \text{sistema bloccato}\}}{\Pr\{\text{r.s.o}\}}$$

r.s.o : richiesta di servizio offerta

In questo tipo di sistema la caratteristica prestazionale più importante da valutare è la probabilità di non ricevere il servizio.

Questa può essere valutata in due modi diversi: considerando la frazione di tempo in cui il sistema è nello stato di congestione (chiamata probabilità di blocco S_p) o considerando la percentuale di chiamate rifiutate sul totale delle chiamate (chiamata probabilità di rifiuto Π_p). Ipotizzando quindi di osservare il sistema per un tempo sufficientemente lungo:

S_p = tempo in cui il sistema è in congestione / tempo totale

Π_p = chiamate rifiutate / totale chiamate

In generale, la probabilità di blocco e la probabilità di rifiuto non coincidono.

Dalla risoluzione del sistema a coda si può ottenere la probabilità di blocco, che corrisponde alla probabilità dello stato in cui tutti i serventi sono occupati.

La misura più significativa dal punto di vista dell'utente è invece ovviamente la probabilità di rifiuto, che ci dice la percentuale di chiamate che verranno rifiutate.

In generale, la probabilità di blocco e la probabilità di rifiuto non coincidono.

Vanno a coincidere nel caso in cui il processo di arrivo sia completamente indipendente dallo stato del servizio (ed è sotto questa ipotesi che consideriamo le code M/M/S/S). Quindi noi risolveremo il sistema a coda M/M/S/S, valuteremo la probabilità di blocco e questa corrisponderà esattamente alla probabilità di rifiuto.

Per concludere questa digressione, voglio fornire un esempio in cui probabilità di blocco e di rifiuto non coincidono. Supponiamo di avere tre linee di giunzione ed un sistema fatto solo da tre utenti. La frequenza di arrivo delle chiamata al sistema NON è indipendente dallo stato: se alcuni utenti sono già impegnati nelle chiamate non possono generare nuove chiamate e la frequenza di arrivo diminuisce. Nel momento in cui tutti e tre gli utenti sono impegnati nelle chiamate la frequenza di arrivo è nulla. Il sistema avrà una certa probabilità di blocco, corrispondente alla frazione del tempo in cui tutti e tre gli utenti sono attivi, ma la probabilità di rifiuto è nulla, perché non vi sono mai chiamate rifiutate !

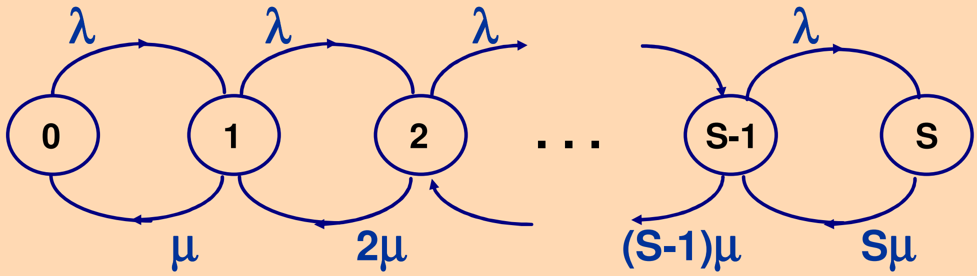
Ritorniamo al sistema M/M/S/S e andiamo a risolverlo, nello stesso modo con cui avevamo risolto il sistema M/M/1.

Il diagramma degli stati in questo caso è finito: se S è la capacità del sistema (numero di linee di giunzione), ci sono S+1 stati.

Coda M/M/S/S: spazio degli stati

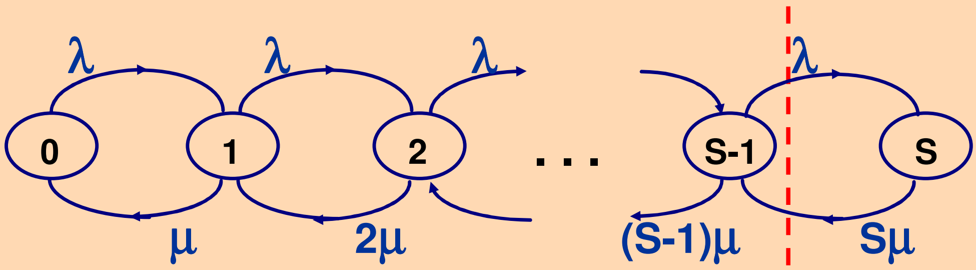
- Supponiamo che il sistema raggiunga uno stato stazionario e cerchiamo la distribuzione del numero di utenti all'interno del sistema cioè le probabilità di stato P{N(t)=k}

- Rappresentiamo il sistema graficamente e consideriamo le transizioni tra uno stato e l'altro



- Ad ogni stato k è associata una probabilità π_k = P{N(t)=k}

Coda M/M/S/S: distribuzione di π_k



- Imponiamo una condizione di equilibrio su ogni taglio:

$$(k+1)\mu\pi_{k+1} = \lambda\pi_k \qquad 0 \le k \le S-1$$

$$\pi_{k+1} = \frac{\lambda}{(k+1)\mu}\pi_k$$

Considerando le condizioni di equilibrio dei flussi e la condizione sulla somma delle probabilità che deve essere pari ad 1, si risolve il sistema di equazioni.

Si noti che la sommatoria sulle probabilità di stato è in questo caso una sommatoria "finita" da 0 a S e non una serie infinita come per la M/M/1.

Probabilità limite di stato

$$p_k = \frac{\lambda}{k\mu_k} p_{k-1} = \frac{\lambda}{k\mu_k} \frac{\lambda}{(k-1)\mu_{k-1}} p_{k-2} = \ldots = \frac{\lambda}{k\mu_k} \frac{\lambda}{(k-1)\mu_{k-1}} \ldots \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0$$

inoltre $\sum_{j=0}^{S} p_j = 1$ da cui

$$p_0 + \sum_{j=1}^{S} p_j = p_0 + \sum_{j=1}^{S} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \frac{1}{j!} p_0 = 1$$

Probabilità limite di stato

$$p_k = p_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^K \frac{1}{k!} = p_0 A_o^k \frac{1}{k!}$$

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{j=0}^{S}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \frac{1}{j!}} = \frac{1}{\sum_{j=0}^{S}(A_o)^j \frac{1}{j!}}$$

posto $A_o = \frac{\lambda}{\mu}$

traffico offerto al sistema

- **quindi** $p_k = \frac{A_o^k \frac{1}{k!}}{\sum_{j=0}^{S} A_o^J \frac{1}{j!}}$ per k=0,1,...,S

Abbiamo quindi ottenuto una formula "chiusa" per rappresentare la probabilità di ciascuno stato a partire dal carico offerto A_o e dal numero di giunzioni S.

Si noti che il carico offerto A_o (misurato in Erlang) non deve essere minore di 1 come nel caso della M/M/1. Esso può essere anche superiore ad S (cioè al numero di serventi). L'equilibrio statistico è garantito dal funzionamento "a perdita" del sistema.

Probabilità di congestione di chiamata

- Poiché il processo di ingresso è di Poisson, la probabilità di r.s.o è indipendente dallo stato e si ha:

$$\Pi_p = S_p \frac{\Pr\{\text{r.s.o} | \text{sistema bloccato}\}}{\Pr\{\text{r.s.o}\}} = S_p$$

- Quindi per un sistema a coda M/M/S/S/∞

Formula B di Erlang

$$E_{1,S}(A_o) = \Pi_p = S_p = \frac{A_o^{\,S} \frac{1}{S!}}{\sum_{j=0}^{S} A_o^{\,j} \frac{1}{j!}}$$

Come abbiamo anticipato prima, si può assimilare la probabilità di blocco alla probabilità di rifiuto, che coincide quindi con la probabilità che il sistema sia nello stato in cui gli S serventi sono occupati (formula B di Erlang).

La formula di Erlang si può valutare con la formula "chiusa" indicata nella slide precedente che prevede una sommatoria da 0 ad S, oppure con una formula ricorsiva, indicata nella slide precedente. Nella formula ricorsiva si può calcolare il valore della formula di Erlang per S serventi e un carico offerto A_o a partire dal valore per S-1 serventi e stesso carico offerto.

L'inizializzazione della ricorsione si ha considerando che se ci sono 0 serventi, la probabilità di blocco è 1.

Formula B di Erlang

- L'espressione della probabilità di sistema bloccato e di rifiuto per un sistema a coda M/M/S/S (a perdita in senso stretto) è denominata anche funzione di Erlang del 1° tipo di ordine S e di argomento A_o

- Gode inoltre della proprietà di calcolo di tipo ricorsivo, infatti:

$$E_{1,S}(A_o)=\frac{A_o^{\,S}\frac{1}{S!}}{\sum_{j=0}^{S}A_o^{\,j}\frac{1}{j!}}=\frac{A_oE_{1,S-1}(A_o)}{S+A_oE_{1,S-1}(A_o)}$$

$$E_{1,0}(A_o)=1,\quad E_{1,1}(A_o)=\frac{A_o}{S+A_o},\ldots$$

Formula B di Erlang

- La grande importanza della formula B di Erlang risiede anche nel fatto che essa risulta valida qualsiasi sia la distribuzione dei tempi di servizio (ferma restando l'ipotesi di i.i.d).

- In condizioni di equilibrio statistico la distribuzione del numero di utenti nel sistema è funzione del solo tempo medio di servizio $1/\mu$ e non della distribuzione del tempo di servizio stesso

Una volta risolto il sistema a coda, si ricavano gli altri parametri prestazionali di interesse: il traffico smaltito, il traffico rifiutato, il coefficiente di utilizzazione dei serventi.

Parametri prestazionali

- Intensità media di traffico smaltito A_s, che rappresenta il numero medio di serventi contemporaneamente occupati, dipende da A_o e dal numero di serventi S:

$$A_S = \sum_{k=1}^{S} k p_k = A_O\left[1 - E_{1,S}(A_O)\right]$$

- Intensità media di traffico rifiutato:

$$A_p = A_O - A_S = A_O E_{1,S}(A_O)$$

- Coefficiente di utilizzazione del servente =

$$\rho = \frac{A_S}{S} = \frac{A_O}{S}\left[1 - E_{1,S}(A_O)\right]$$

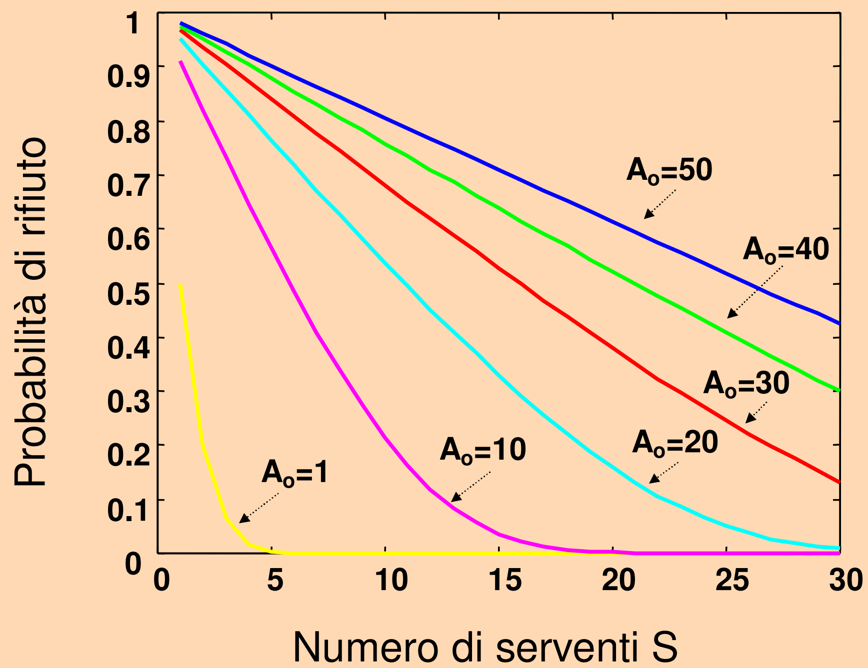
Nella slide successiva sono mostrate le curve della probabilità di rifiuto in funzione del numero dei serventi, per diversi valori del carico offerto.

Dato un certo carico offerto, si vede come la probabilità di rifiuto decresca al crescere del numero dei serventi. Noi siamo in genere interessati alla zona in cui la probabilità di rifiuto diviene sufficientemente bassa (es. nell'ordine di 0,01 ossia 1%)

Si vede che il numero di serventi deve essere abbastanza superiore al carico offerto per raggiungere tale obiettivo.

Ad esempio per carico offerto A_o = 10, se ci sono 10 serventi la probabilità di rifiuto è dell'ordine del 20%. Si intuisce che la probabilità scende a valori dell'1% per un numero di serventi compreso tra 15 e 20.

Probabilità di rifiuto in funzione del numero di serventi



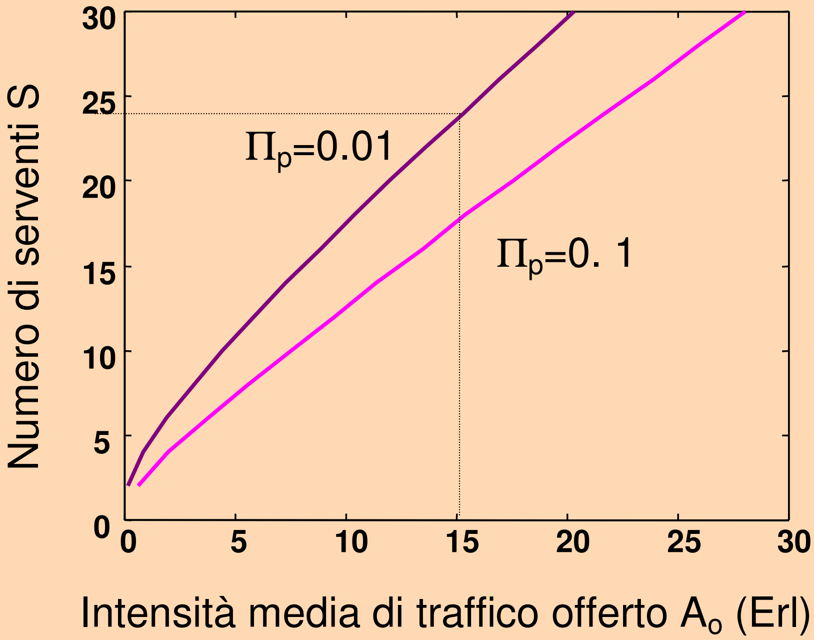
- La probabilità di rifiuto, a parità di A_o, decresce al crescere del numero di serventi S

La ricerca del numero di serventi giusto per ottenere una prefissata probabilità di perdita si può effettuare più agevolmente grazie a dei grafici come quelli riportati nella slide successiva.

Per un dato valore della probabilità di perdita, sono riportate in ascissa il traffico offerto e in ordinata il numero di serventi.

Ad esempio volendo ottenere per un traffico offerto di 15 Erlang una probabilità di perdita di 0,01 (la curva più in alto), si può vedere che sono necessari 24 serventi.

Numero di serventi necessari a garantire una data probabilità di rifiuto in funzione del traffico offerto



A parità di S la probabilità di rifiuto è una funzione monotona crescente di A_o

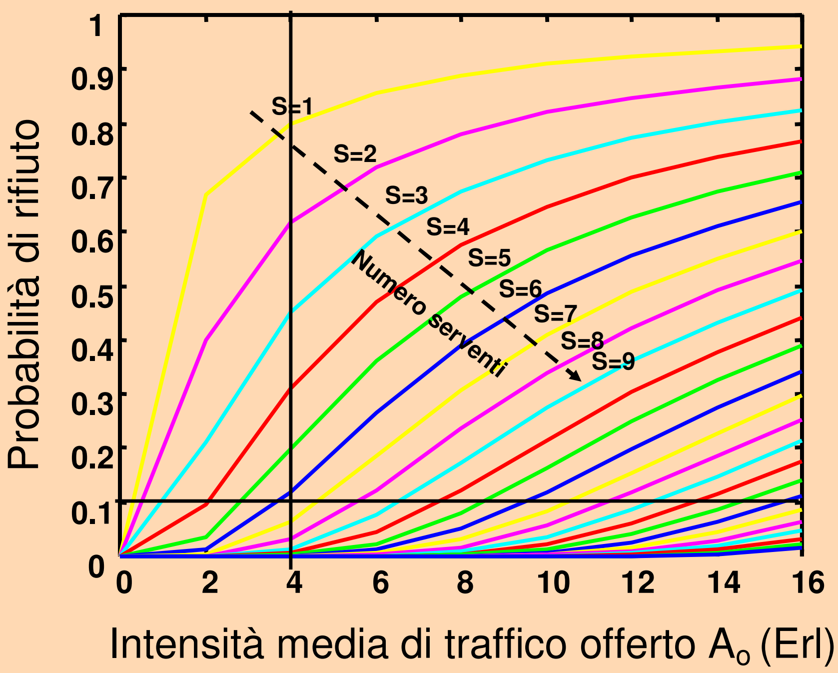
Nella slide successiva si mostra una ulteriore rappresentazione di questa relazione tra traffico offerto, numero di serventi e probabilità di blocco.

Questa volta il traffico offerto è in ascissa, la probabilità di blocco in ordinata e le curve sono parametriche rispetto al numero di serventi.

Si vede che fissato un certo carico offerto (linea verticale), al crescere del numero dei serventi la probabilità di blocco diminuisce.

Fissata invece un certa probabilità di blocco (linea orizzontale), al crescere del numero dei serventi aumenta il carico offerto che si può supportare con la data probabilità di blocco.

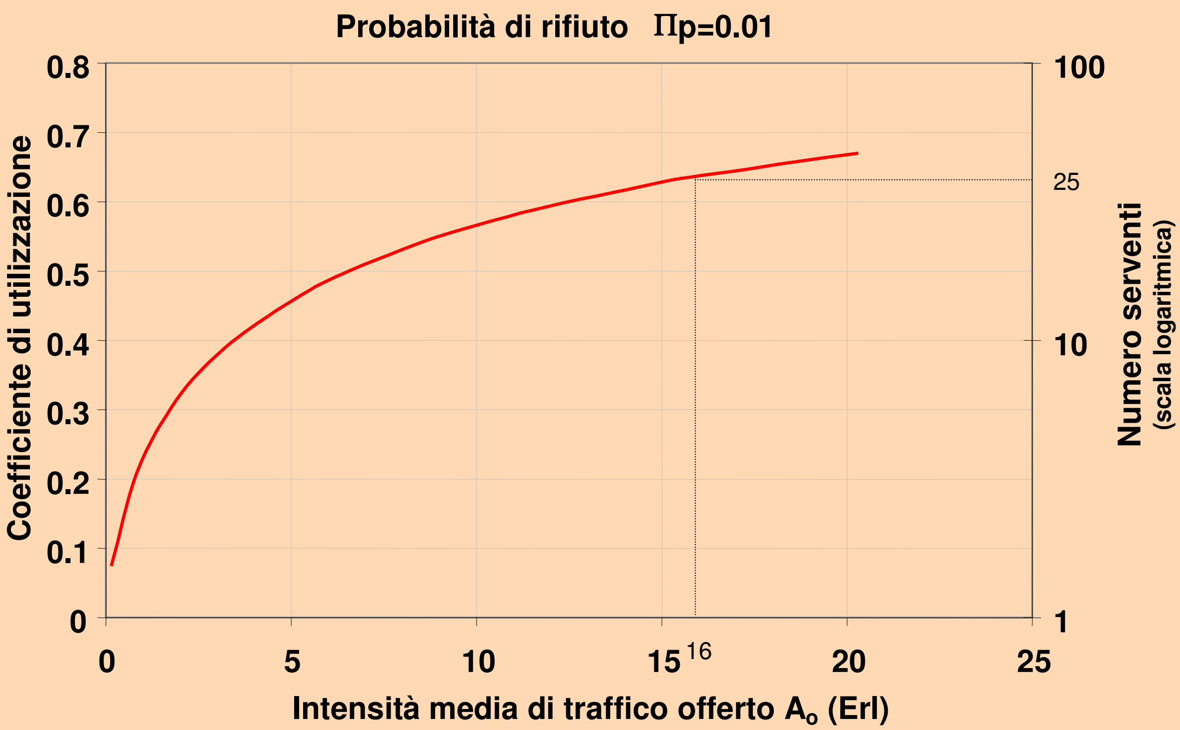
Probabilità di rifiuto in funzione dell'intensità media di traffico offerto



Il grafico successivo mostra il coefficiente di utilizzazione dei serventi data una certa probabilità di rifiuto (1%). Si vede che al crescere del traffico offerto, per garantire la stessa probabilità di rifiuto, si può operare con utilizzazioni crescenti.

Fissato un valore di traffico offerto, es. 16 Erlang nel grafico, data l'utilizzazione del sistema si può valutare il numero di serventi corrispondenti, che vengono riportati in ordinata a destra nel grafico.

Coefficiente di utilizzazione in funzione del traffico offerto



I sistemi “più grandi” sono più efficienti

- A parità di congestione di chiamata sistemi con elevato numero di serventi presentano, in condizioni di equilibrio statistico, un rendimento migliore rispetto a sistemi con pochi serventi.

La “regola” individuata nella slide precedente viene esemplificata con l’esempio riportatato nella slide successiva.

Si parte da un traffico offerto di 100 Erlang e si vede che sono necessarie 117 linee di giunzione per avere una probabilità di rifiuto minore dell’1%.

Se si divide il traffico offerto in due parti da 50 Erlang che vengono “segregati” su due fasci distinti, si vede che ciascun fascio ha bisogno di 64 giunzioni, per un totale di 128. Il rendimento di utilizzazione di ciascuna giunzione sarà ovviamente minore. Il procedimento viene reiterato, dividendo il traffico in parti sempre più piccole, per dimostrare che il rendimento va sempre a peggiorare.

I sistemi "più grandi" sono più efficienti: esempio

- Traffico offerto ad una linea telefonica A_o=100 Erl
- Tale traffico viene offerto ad un unico fascio di circuiti in modo tale che la probabilità di rifiuto rimanga sotto l' 1%

$$E_{1,S}(A_0) \le 0.01 \quad \Rightarrow \quad S=117$$

- Si supponga ora di ripartire tale traffico uniformemente su m fasci con *m*=2, 4, 10 ,25, 50, 100. Il traffico ripartito è <u>segregato</u> nel suo fascio.
- Si può notare come all'aumentare di *m* aumenta il numero di circuiti necessari e diminuisce il coefficiente di utilizzazione di ogni singolo fascio

m	$A_{oi}=(A_o/m)$	S	$S=S_i*m$	Π_p	ρ
1	100	117	117	0.0098	0.8463
2	50	64	128	0.0084	0.7747
4	25	36	144	0.0080	0.6889
10	10	18	180	0.0071	0.5516
25	4	10	250	0.0053	0.3979
50	2	7	350	0.0034	0.2847
100	1	5	500	0.0031	0.1994

Impiego della formula B di Erlang (1/2)

- Dimensionamento del sistema

Stimato il traffico offerto A_o e fissato il valore massimo per la probabilità di congestione di chiamata Π_{max}, determinare S:

» trovare il più piccolo valore di S tale per cui

$$E_{1,S}(A_o) \le \Pi_{max}$$

» tale valore può essere facilmente determinato per tentativi a partire da S=1

» il valore effettivo della congestione di chiamata potrà risultare inferiore a Π_{max}

Impiego della formula B di Erlang (2/2)

- **Valutazione delle prestazioni**

Dato il numero dei serventi ed il traffico offerto, determinare la probabilità di di congestione di chiamata:

» **Va notato che solitamente è noto il traffico smaltito A^*_s e il numero di serventi S da cui si può stimare A_o attraverso la relazione seguente**

$$A_o\left[1 - E_{1,S}(A_o)\right] = A_s^*$$

» **Una volta calcolato Ao si calcola la probabilità di congestione di chiamata**

$$\Pi_p = E_{1,S}(A_o)$$

Nel seguito sono riportati due esercizi che si possono risolvere con la "formula di Erlang" e le relative risoluzioni.

Al fine di risolvere questo tipo di esercizi, si fa in genere riferimento a delle "tabelle" che riportano i valori della formula di Erlang al variare di A_o ed S, che vi vengono rese disponibili.

Esercizio 1

- Si consideri un centralino telefonico automatico (PABX) di una grande azienda. Il centralino è collegato alla rete telefonica nazionale (RTN) tramite un certo numero di linee bidirezionali.
- Si consideri inoltre che:
  - nell'ora di punta gli utenti attestati al centralino formulano mediamente 140 chiamate dirette verso la RTN;
  - nell'ora di punta il numero di chiamate provenienti dalla RTN e dirette verso gli utenti del PABX è mediamente 180;
  - il flusso delle chiamate sia entranti che uscenti è Poissoniano;
  - la distribuzione di probabilità delle durate delle conversazioni è di tipo esponenziale negativo con valor medio pari a 3 minuti;
  - la modularità delle linee è pari a 4, ovvero si possono inserire linee solo a gruppi di 4;
  - il PABX è del tipo a perdita pura.
- Si determini il numero di linee necessario a garantire un grado di servizio tale per cui la congestione di chiamata non sia superiore all'1%.
- Calcolare inoltre la frequenza massima delle chiamate nell'ora di punta.

Soluzione Esercizio 1

- Il PABX può essere modellato con un sistema a coda del tipo M/M/S/S/∞ in cui S è il numero di linee tra PABX e RTN
- Si calcola il traffico globale offerto. Questo è pari alla somma del traffico uscente A_u:

$$A_u = \frac{140}{60} * 3 = 7 \ Erl$$

- e del traffico entrante A_e:

$$A_e = \frac{180}{60} * 3 = 9 \ Erl$$

- quindi

$$A_o = A_u + A_e = 16 \ Erl$$

Soluzione Esercizio 1

- Per calcolare il numero di linee necessario a garantire una probabilità di congestione di chiamata minore dello 0.01 va calcolato il più piccolo S tale per cui

$$E_{1,S}(A_o) \le 0.01$$

- Si ottiene in tal caso S=25
- A causa del vincolo sulla modularità il numero di linee da inserire sarà pari quindi a S=28
- Dato tale numero di linee la congestione di chiamata sarà notevolmente inferiore a quella richiesta infatti

$$\Pi_{p,effettivo} = E_{1,28}(16) = 0.0019$$

Soluzione Esercizio 1

- Per determinare la frequenza massima delle chiamate consentita nell'ora di punta si calcola prima il valore di A_{omax} tale per cui

$$E_{1,28}(A_{omax}) \le 0.01$$

da cui si ricava A_{omax} = 18.64 (vedi slide successive)

quindi si ha:

$$\lambda_{max} = A_{omax} * \frac{60}{3} \cong 373 \text{ chiamate / ora}$$

Soluzione Esercizio 1

- Calcolo di A_{omax} a partire dalla tabella della formula di Erlang contenuta nel file “erlang.pdf”
- Dato che la tabella non riporta i valori delle probabilità di perdita per tutti i valori di carico offerto, si può procedere utilizzando una approssimazione lineare.
- Dalle tabelle è possibile verificare che

$$E_{1,28}(18) = 0.007091 < 0.01 \quad E_{1,28}(20) = 0.018792 > 0.01$$

- A_{omax} sarà quindi compreso tra 18 e 20.

Soluzione Esercizio 1

- L’approssimazione lineare di una funzione f(x) prevede che, noti f(A) e f(B), si possa approssimare f(X) per A<X<B con:

$$f(X) \cong f(A) + [f(B) - f(A)] \cdot \frac{X-A}{B-A}$$

Cioè si sostituisce f(x) con la retta che passa per (A,f(A)) e (B,f(B))

- Applicando l’approssimazione lineare al nostro caso:

$$E_{1,28}(X) = E_{1,28}(18) + [E_{1,28}(20) - E_{1,28}(18)] \cdot \frac{X-18}{20-18}$$

Soluzione Esercizio 1

- Stiamo cercando il punto in cui la funzione vale 0,01, mentre l'incognita è X, quindi dobbiamo risolvere

$$0{,}01 = E_{1,28}(18) + \left[E_{1,28}(20) - E_{1,28}(18)\right] \cdot \frac{X-18}{20-18}$$

$$0{,}01 = 0{,}007091 + \left[0{,}018792 - 0{,}007091\right] \cdot \frac{X-18}{20-18}$$

Da cui si ricava X, cioè A_{omax} = 18.64

Esercizio 2

- Si consideri il PABX dell'esempio 1 dimensionato con 28 linee bidirezionali che lo connettono alla Rete Telefonica Nazionale.

- A distanza di tempo dalla sua installazione si vuole valutare la qualità di servizio offerta sapendo che a seguito di una campagna di misure si è riscontrato, nell'ora di punta, un valore di intensità media di traffico smaltito pari a circa 20.42 Erl.

Soluzione Esercizio 2

- Dato il traffico smaltito misurato si può ricavare il traffico offerto al sistema risolvendo l'equazione

$$A_o(1 - E_{1,28}(A_o)) = 20.42$$

da cui si ha (per tentativi, vedi slide successive): $A_o = 21\ Erl$

- Per cui, per quanto riguarda il valore di congestione di chiamata, si ha

$$E_{1,28}(21) = 0.0277$$

- Il PABX non è più in grado di rispettare il vincolo sul grado di servizio. Le prestazioni sono variate, ad esempio, per un leggero incremento dell'utenza. Bisogna quindi aumentare il numero di linee per riportare la probabilità di rifiuto sotto la soglia dello 0.01.

Soluzione Esercizio 2

$A_o = 21\ Erl$

- Come risolvere per tentativi ed utilizzando la tabella contenuta nel file erlang.pdf l'equazione:

$$A_o(1 - E_{1,28}(A_o)) = 20.42$$

- Il carico offerto sarà sicuramente maggiore di quello smaltito, quindi conviene verificare per il primo valore di carico offerto presente nella tabella e maggiore di 20,42.
- Nella tabella è presente, $E_{1,28}(22) = 0.038796$ sostituendo si ha:

$$22(1 - E_{1,28}(22)) = 22(1 - 0{,}038796) = 21{,}14 > 20{,}42$$

- Quindi il carico offerto sarà minore di 22. SI può provare con un carico offerto di 21 Erlang, stimando la probabilità di perdita a partire dalla probabilitè di perdita per 20 Erlang e 22 Erlang

Soluzione Esercizio 2

- Si utilizza l'approssimazione lineare, che in questo caso corrisponde a fare la media tra

$$E_{1,28}(20) = 0.018792 \qquad E_{1,28}(22) = 0.038796$$

$$E_{1,28}(21) \cong \frac{E_{1,28}(20) + E_{1,28}(22)}{2} = 0,028794$$

- In questo caso, provando a sostituire:

$$21\left(1 - E_{1,28}(21)\right) = 21(1 - 0,028794) = 20,42$$